



梁小强, 杨道学, 张可能, 等. 2017. FDTD 数值模拟在 GPR 管线探测中的应用. 地球物理学进展, 32(4): 1803-1807, doi:10.6038/pg20170453.
LIANG Xiao-qiang, YANG Dao-xue, Zhang Ke-neng, et al. 2017. Application of FDTD numerical simulation of Ground Penetrating Radar in pipeline detection. *Progress in Geophysics* (in Chinese), 32(4): 1803-1807, doi:10.6038/pg20170453.

FDTD 数值模拟在 GPR 管线探测中的应用

Application of FDTD numerical simulation of Ground Penetrating Radar in pipeline detection

梁小强^{1,2}, 杨道学^{1,2}, 张可能^{1,2}, 吴奇¹

LIANG Xiao-qiang^{1,2}, YANG Dao-xue^{1,2}, Zhang Ke-neng^{1,2}, WU Qi¹

1. 中南大学 地球科学与信息物理学院, 长沙 410083

2. 有色金属成矿预测教育部重点实验室, 长沙 4100833

1. School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083, China

2. Key Laboratory of Metallogenic Prediction of Nonferrous Metals, Ministry of Education, Changsha 410083, China

摘要 探地雷达是一种非常重要的管线探测技术, 为了提高地下管线雷达图像特征的认识, 确定管线异常体的位置, 提高雷达资料的解释精度. 论文从 Maxwell 两个旋度方程出发, 推导了二维 TM 波的差分方程、CFL 数值稳定性条件、频散关系. 然后, 基于 Matlab 平台编写了探地雷达正演的 FDTD 程序, 应用该 FDTD 程序开展了管线探测中探地雷达探测效果分析, 包括对管埋藏深度、管线间距、管内物质、管线材质等影响因素的数值模拟. 通过分析雷达正演剖面特征, 可以清晰了解并掌握雷达管线探测与各种影响参数之间的关系, 对实际地下管线探测可起到指导作用. 最后, 将 GPR 应用于武广高速浏阳河隧道管线探测中, GPR 准确地定位了 PVC 通讯电缆的位置在埋深, 为工程施工与处置提供了依据.

关键词 探地雷达; 管线探测; 时域有限差分法; 正演模拟

中图分类号 P631

文献标识码 A

doi:10.6038/pg20170453

Abstract Ground Penetrating Radar (GPR) is a very important pipeline detection technology, in order to increase awareness of the underground pipeline the radar image features. Determine the location of the pipeline anomalies and improve the accuracy of interpretation of radar data. The paper is from Maxwell two curl equations, to derive two-dimensional TM wave differential equations, CFL numerical stability condition and dispersion relations. Then, based on Matlab platform prepared a ground penetrating radar forward the FDTD program, the application of the FDTD program launched pipeline detection in ground penetrating radar effectiveness analysis. The paper is the numerical simulation about a number of factors of the pipeline burial depth, spacing between pipelines and the different materials in pipelines. By analyzing the characteristics of the radar forward cross-section, we can clearly understand and grasp the radar detection pipeline with various parameters affect the relationship. This can play a guiding role of the actual underground pipeline detection. Finally, the GPR is applied to the Liuyang River Tunnel of Wuhan-Guangzhou high-speed pipeline detection, the GPR accurately locate the position and depth of PVC communication cables, for the construction and disposal provided.

Keywords Ground Penetrating Radar (GPR); pipeline detection; finite difference time domain; forward simulation

0 引言

地下管线是城市公共基础设施的重要组成部分, 为城市输送养料, 与人民的生产生活密切相关. 随着城市的高速发展, 对地下管线的需求也在增加, 为了对城市地下管线更有效的管理与统筹, 开展管网数据库的建设及地下管线探测技术的深入研究势在必行(王学海, 2006).

经过几十年的发展, 地下管线探测方法已有许多种, 如: 电磁感应法(史伟, 2015)、管线探测仪(王明星等, 1997)、磁梯度法(王水强等, 2005)、高密度电阻率(杜良法和李先军,

2007)、瞬态瑞雷面波(杨兴其等, 2000)、地震映像法(肖顺等, 2014)、探地雷达(GPR)(张鹏等, 2015)、综合物探法(王勇和王永, 2011). 这些不同的方法从不同的物性差异着手, 建立了一套成熟的理论方法和工作体系, 但各有优缺点. 在众多的探测方法中, GPR 具有高精度、高分辨率、无损性等独特的优势, 它只要目标管线与周围介质间存在介电常数的差异, 就能开展 GPR 探测, 既可以探测金属管线也可以探测非金属管线(曾昭发等, 2010). 考虑到实际管线探测环境条件的复杂性, 给雷达探测及解释工作带来了诸多困难, 为此, 本文应用时域有限差分法(FDTD)开展了 GPR 正演, 并通过数

值模拟探讨了管线的埋深与间距、管道内不同物质与雷达探测效果的关系,总结了不同管状体在雷达正演剖面的图像特征,有助于雷达资料的判断和解释.

1 时域有限差分法原理

1.1 差分方程的导出

FDTD 进行 GPR 数值模拟时,需要从 Maxwell 旋度方程出发(Yee,1966),在无源区域两个旋度方程可表示为(葛德彪和闫玉波,2005):

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma_m \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma_e \mathbf{E} \end{cases}, \quad (1)$$

式(1)中: \mathbf{E} 为电场强度(A/m); \mathbf{H} 为磁场强度(A/m); ε 为介电常数(F/m); μ 为磁导率(H/m); σ_e 为电导率(S/m); σ_m 为等效磁阻率(ω/m).

二维情况下 Maxwell 方程组可分裂为相互独立的两组方程,分别为横磁波 TM 与横电波 TE, GPR 模拟过程中常采用 TM 波,它只有 E_z , H_x 和 H_y 三个分量,其方程组表示为

$$\begin{cases} \partial E_z / \partial t = (\partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y - \sigma_e E_z) / \varepsilon \\ \partial H_x / \partial t = -(\partial E_z / \partial y + \sigma_m H_x) / \mu \\ \partial H_y / \partial t = (\partial E_z / \partial x - \sigma_m H_y) / \mu \end{cases}. \quad (2)$$

采用图 1 所示的 Yee 氏网格模型(Yee,1966)对模拟区域进行离散,利用中心差商代替微商,把连续变量离散化.同时设模型中 Yee 氏网格的尺寸分别为 Δx 和 Δy , Δt 为时间步长,红色的网格节点为电场值 E_z ,它垂直平面向里,半网格点上的黑色箭头分别表示磁场 H_x , H_y ,将每个节点进行编号,若 E_z 位于 (i, j) 点,以及时刻 $t = (n+1)\Delta t$,则 H_x 对应于 $(i, j+1/2)$ 点及 $t = (n+1/2)\Delta t$ 时刻, H_y 对应于 $(i+1/2, j)$ 点及 $t = (n+1/2)\Delta t$ 时刻,可推导出二维空间 GPR 正演 TM 波的 FDTD 方程为

$$H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) = \text{CP}(m) \cdot H_x^{n-1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - \frac{\text{CQ}(m)}{\Delta y} \cdot [E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)], \quad (3)$$

$$H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) = \text{CP}(m) \cdot H_y^{n-1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \frac{\text{CQ}(m)}{\Delta x} \cdot [E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)], \quad (4)$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = \text{CA}(m) \cdot E_z^n(i, j) + \frac{\text{CB}(m)}{\Delta x} \left[H_y^{n+1/2}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n+1/2}\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right] - \frac{\text{CB}(m)}{\Delta y} \left[H_x^{n+1/2}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+1/2}\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right], \quad (5)$$

式(3)~(5)中的电磁参数中标号 m 的取值与其式中右端电场或磁场分量的空间位置相同,式中

$$\text{CA}(m) = [2\varepsilon(m) - \sigma_e(m)\Delta t] / [2\varepsilon(m) + \sigma_e(m)\Delta t], \quad (6)$$

$$\text{CB}(m) = 2\Delta t / [2\varepsilon(m) + \sigma_e(m)\Delta t], \quad (7)$$

$$\text{CP}(m) = [2\mu(m) - \sigma_m(m)\Delta t] / [2\mu(m) + \sigma_m(m)\Delta t], \quad (8)$$

$$\text{CQ}(m) = 2\Delta t / [2\mu(m) + \sigma_m(m)\Delta t]. \quad (9)$$

1.2 数值频散及 CFL (Courant-Friedrich-Levy) 稳定性条件

应用 FDTD 法开展 GPR 数值模拟时,由于差分近似导致电磁波的相速度随波长、传播方向及变量离散化的情况而发生变化,因而在传播空间出现频散.这种频散是由网格尺寸和离散数值效应引起的虚假频散现象,不属于物理频散,通常称之为数值频散.数值频散现象可以通过选取足够小空间和时间的步长进行压制.但小的步长必然需要大的计算时间. Taflove (1995)证明了空间步长间隔须满足:

$$\Delta s \leq \lambda_{\min} / 10, \quad (10)$$

式(10)中, $\Delta s = \min(\Delta x, \Delta y)$, 为离散空间间隔, λ_{\min} 为介质空间中电磁波的最小波长.此外, FDTD 的计算中是以差分代替微分,按时间步递进计算电磁场的变化,只有离散后差分方程的解是收敛和稳定的,这种代替才有意义.据 Taflove 和 Brodwin(1975)的研究结果,要求时间变量步长 Δt 与空间变量步长 Δx 和 Δy 之间必须满足如下条件,公式为

$$c\Delta t \leq 1 / \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2}, \quad (11)$$

式(11)中的 $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 为介质的电磁波速度.否则将出现数值不稳定性.即当空间步长选定后,为了使计算是稳定的,时间步长的选取所受到的限制.如果采用正方形网格,则 $\Delta x = \Delta y = \Delta s$, GPR 的 2D 数值稳定条件(11)简化为

$$\Delta t \leq \Delta s / \sqrt{2}c. \quad (12)$$

2 管线探测中 GPR 探测影响因素分析

2.1 管线不同的埋深与间距分析

雷达波在地下传播过程中,对地下目标物体的反射及绕射性能受许多因素的影响,其中地下媒质的特性参数、雷达波的频率、媒质的含水性都影响着雷达波的探测效果.为了提高管线的雷达探测精度,下面应用 FDTD 算法开展管线埋深、间距,管线内不同物质的电磁散射特性及 GPR 波形特征的正演,为工程实测雷达图像解译提供理论支持.

图 2a 为间距不同、埋深不同的金属管状异常体在同一背景介质中的模型.模拟区域长与宽为 $2.5 \text{ m} \times 2.0 \text{ m}$,背景介质的电导率为 0.01 S/m ,相对介电常数为 6.0 .在 $(0.4 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$ 、 $(0.8 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$ 、 $(1.5 \text{ m}, 0.75 \text{ m})$ 、 $(2.0 \text{ m}, 0.75 \text{ m})$ 位置处各有个半径 0.15 m 的金属管状异常体,图 2a 左上方两个金属管状异常体间距为 0.1 m ,右下方两个金属管状异常体间距为 0.2 m .采用 FDTD 法对这个模型进行正演,边界条件采用单轴各向异性完全匹配层边界条件(Gedney, 1996; 肖明顺等, 2008; 冯德山等, 2010).源为 400 MHz 的 Ricker 子波,空间步长为 0.005 m ,时间步长为 0.1 ns ,时窗长度为 24 ns ,第一道雷达数据发射天线位于 0.0 m ,接收天线位于 0.0 m ,收发天线同步移动,每隔 0.025 m 采集一道雷达数据,总共采集了 100 道雷达数据,UPML 设为 8 个网格.

图 2b 中可见,管状球体的上界面能够清楚地被分辨出来,埋深浅一点的两个金属管异常正演图中电磁波能量强一些,图像更加清晰,虽然他们间距较小,但是 GPR 依然可以清晰的分辨出两个管道的位置,埋深深一点的两个金属管异常体正演图中电磁波能量稍弱,但是依然可以清晰的辨认出两个异常体的位置.该正演实例说明:异常体的埋深对 GPR 管线探测是一个重要的影响因素;在异常体间距较短情况

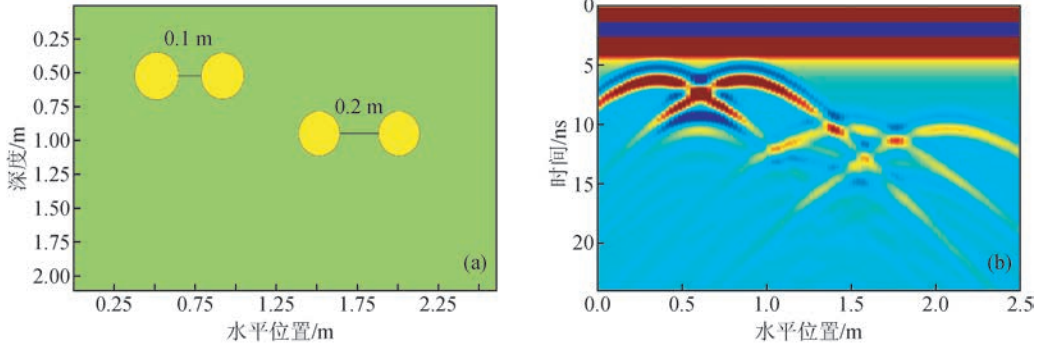


图2 不同埋深、不同间距圆状异常地电模型示意图

(a) 模型图; (b) 正演图.

Fig. 2 Different depths, different pitches circular electrical schematic model abnormally

(a) Model diagram; (b) Forward diagram.

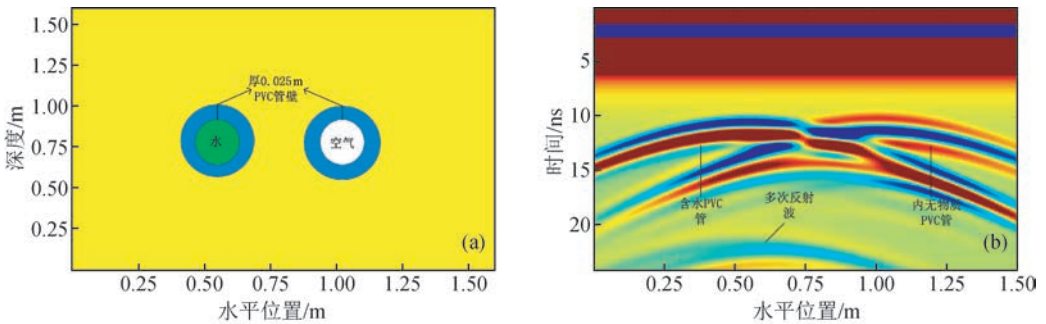


图3 PVC 管道内部不同物质异常地电模型示意图

(a) 模型图; (b) 正演图.

Fig. 3 Schematic model of geoelectric anomalies inside PVC pipes of different substances

(a) Model diagram; (b) Forward diagram.

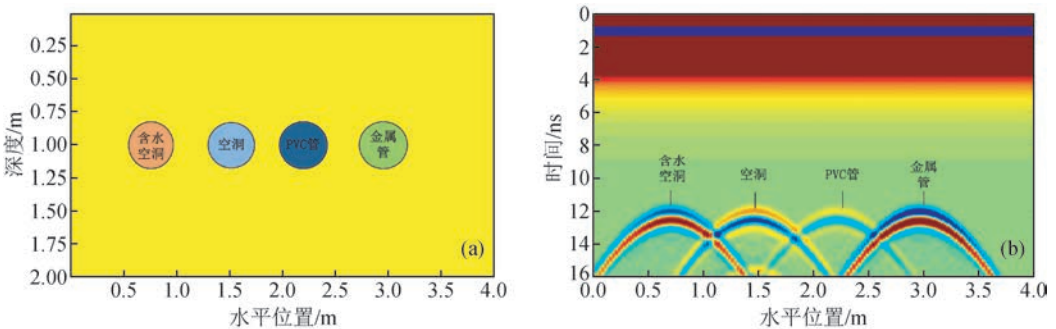


图4 不同材料模型的地电模型

(a) 模型图; (b) 正演图.

Fig. 4 Geoelectric models of different material models

(a) Model diagram; (b) Forward diagram.

下,依然可以辨别异常体位置,说明 GPR 对管线探测识别能力很强.

2.2 管道内不同物质分析

图 3a 为两个 PVC 管内部装有不同物质的异常体在同一背景介质中的模型. 模拟区域长与宽为 1.5 m × 1.5 m,背

景介质的电导率为 0. 01 S/m, 相对介电常数为 6. 0. 在 (0. 60 m, 0. 75 m)、(1. 05 m, 0. 75 m) 位置处各有个半径为 0. 15 m 的 PVC 管, 管壁厚度为 0. 025 m, 左边 PVC 管内部充满水, 右边 PVC 管内部无物质, 只有空气. 其他参数同上例, 每隔 0. 005 m 采集一道雷达数据, 总共采集了 300 道雷达

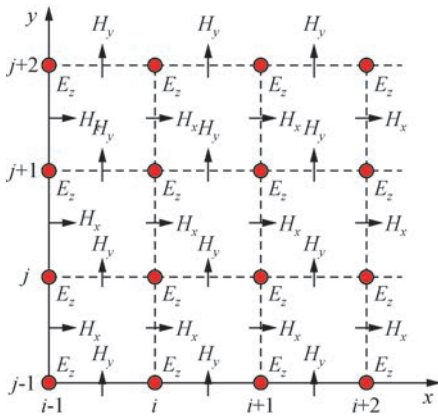


图1 二维 Yee 网格及电磁场分布

Fig. 1 Yee's grid and electromagnetic field distribution of two-dimensional

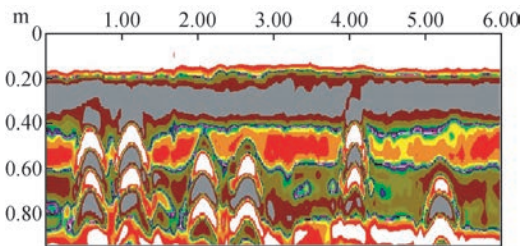


图5 浏阳河隧道中某段雷达探测剖面图

Fig. 5 The one of GPR prospecting section of Liuyang River Tunnel

数据。

图 3b 中可见, 含水的 PVC 管电位与雷达波的电位相反, PVC 管的上界面可以清晰的被检测到, 由于水的相对介电常数较高, 导致电磁波在探测到含水的 PVC 管道时发生强烈的反射; 而内部为空气的 PVC 管道与雷达波的电位相同, GPR 波传播至 PVC 管道时, 由于管道为空的, 雷达波同样会出现双曲线绕射波, 且弧形双曲线下还会出现多次反射波, 多次反射波的间距与管径成明显的正比关系, 通过它能较好地推断 PVC 管的管径。由此可见: GPR 探测城市地下管道时, 管道内部物质的成分直接影响到探测的雷达波形。

2.3 不同材质管线模型分析

建立图 4a 所示的含有不同管线模型, 模型区域为 $4.0\text{ m} \times 2.0\text{ m}$, 网格为 800×400 , 模拟区域的背景介质相对介电常数为 6.0, 电导率为 0.01 S/m , 在位于 $(0.75\text{ m}, 1.00\text{ m})$ 、 $(1.50\text{ m}, 1.00\text{ m})$ 、 $(2.25\text{ m}, 1.00\text{ m})$ 、 $(3.00\text{ m}, 1.00\text{ m})$ 位置处分别是含水空洞、空洞、PVC 管道、金属管道截面圆心。它们的半径均为 0.25 m , 介质的相对介电常数分别为 81.0、1.0、1.4、50.0, 电导率依次为 0.001 、 0 、 0.005 、 5 , FDTD 法模拟参数设置同上例。

通过图 4b 中不同材质管线与空洞 GPR 正演剖面图可以发现: 在含水空洞、空洞、PVC 管、金属管都同时存在于同一埋深的条件下, 含水空洞和金属管的电磁波相位与空洞和 PVC 管电磁波相位相反, 这是由于含水空洞和金属管的相对

介电常数与电导率都高于空洞和 PVC 管, 金属管弧形曲线反射最明显, 能量最强, 这是由于金属管的介电常数与背景介质的介电常数相差较大, 形成了强电磁波反射面所致; 空洞异常体双曲线弧形亦较明显, 弧形双曲线的顶部能有较指示空洞的上顶面; 而 PVC 管的双曲线弧形反射在雷达剖面中也明显可见, 但它的反射最弱, 正常情况下 PVC 管弧形双曲线下还会出现多次反射波, 多次反射波的间距与管径成明显的正比关系, 通过它能较好地推断 PVC 管的管径。

3 地下管线 GPR 探测实例

武广高铁浏阳河隧道位于湖南省长沙市东部, 自北向南贯穿整个长沙市, 隧道全长 10.1 km , 开挖断面达到 160 km^2 , 被列为武广客专线上的重点控制工程, 浏阳河隧道是目前我国首座穿越大河的高速铁路隧道, 它填补了我国高速铁路穿越城市、穿越河流和大跨度等多项空白。而武广高铁浏阳河隧道施工完后, 需要在路基中间增加导水沟, 这需要切割已建好的水泥路基, 但由于路基下 0.5 m 左右深度埋有不同的地下管线和电缆, 需要查明管线的具体位置。工程实测中采用美国 GSSI 公司的 SIR-3000 型探地雷达仪, 900 MHz 天线, 时窗长度设置为 18 ns , 可达探测深度为 1 m 左右。测线与路基平行, 由于线路不长, 故采用点测方法进行, 点距为 0.05 m , 即每米 20 个点。

图 5 为浏阳河隧道中某段雷达探测成果 wiggle 图。如图 5 中红色虚框中所示, 在测线 6 m 范围内共有 6 根通讯电缆管线, 其形状为向下开口的双曲线弧形, 该弧形反射信号为地下管线的反射, 反射波能量较强, 并且有多次波存在, 但双曲线的弧顶准确地指示出了管线的最顶部的位置, 尽管双曲线弧形两翼跨度较大, 较管线的实际大小要大得多, 但双曲线弧形还是准确地指示了 6 根管线的具体位置与顶部埋深, 可为工程施工提供依据。

4 结论

4.1 应用探地雷达进行实际管线探测中, 如何对所得雷达图像进行恰当准确的解释是方法应用能否成功的关键。利用 FDTD 开展探地雷达典型地下管线模型正演, 有助于了解不同管线的雷达反射图像特征, 判断出管线材质、管线中充填物质和管径大小, 有效指导实际雷达管线探测, 提高地下管线探测精度。

4.2 探地雷达正演模拟表明: GPR 探测城市地下管道时, 管道内部物质的成分直接影响到探测的雷达波形, 如果管道内含水则更有利于雷达探测。异常体的埋深对 GPR 管线探测是一个重要的影响因素; 在异常体间距较短情况下, 依然可以辨别异常体位置, 说明 GPR 对管线探测识别能力很强。此外, 金属管线和非金属管线的雷达反射波图像不同, 可据此判断出管线材质。

致谢 感谢审稿专家提出的修改意见和编辑部的大力支持!

References

Du L F, Li X J. 2007. Application of detection techniques of

- underground pipelines under complicated conditions [J]. *Geology and Prospecting* (in Chinese), 43(3): 116-120.
- Feng D S, Chen C S, Dai Q W. 2010. GPR numerical simulation of full wave field based on UPML boundary condition of ADI-FDTD [J]. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 53(10): 2484-2496, doi: 10.3969/j. issn.0001-5733. 2010. 10.022.
- Ge D B, Yan Y B. 2005. Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves (in Chinese) [M]. Xi'an: Xidian University Press.
- Gedney S D. 1996. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(12): 1630-1639.
- Shi W. 2015. Application and discussion of electromagnetic induction method in underground pipeline exploration [J]. *Construction & Design for Project* (in Chinese), (12): 68-71.
- Taflove A. 1995. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* [M]. London: Artech House.
- Taflove A, Brodwin M E. 1975. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering Problems using the time-dependent Maxwell's equations [J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 23(8): 623-630.
- Wang M X, Li X Z, Xu B M, *et al.* 1997. Method for raising underground metal pipe detector's resolving power [J]. *Journal of Zhengzhou University* (in Chinese), 29(1): 49-54.
- Wang S Q, Huang Y J, Li F S, *et al.* 2005. Research of magnetic gradient in detecting trenchless metal pipe [J]. *Chinese Journal of Engineering Geophysics* (in Chinese), 2(5): 353-357.
- Wang X H. 2006. Urban underground pipeline detection and underground pipeline information system construction (in Chinese) [MSc thesis]. Changsha: Central South University.
- Wang Y, Wang Y. 2011. Application of integrated geophysical method in detection of underground pipeline laid by trenchless technology [J]. *Bulletin of Surveying and Mapping* (in Chinese), (4): 58-61.
- Xiao M S, Chang Y J, Cao Z L, *et al.* 2008. Research on boundary conditions in forward modeling of ground penetrating radar [J]. *Chinese Journal of Engineering Geophysics* (in Chinese), 5(3): 315-320.
- Xiao S, Zhang Y M, Ren J P. 2014. The Application of seismic imaging method in ultra-deep pipeline detection [J]. *Urban Geotechnical Investigation & Surveying* (in Chinese), (1): 170-172.
- Yang X Q, Zhao W, Zhang S M. 2000. Application of seismic imaging method in aid sewer renovation project in Ecuador [J]. *West-China Exploration Engineering* (in Chinese), (5): 67-68.
- Yee K S. 1966. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3): 302-307.
- Zeng Z F, Liu S X, Feng X, *et al.* 2010. Theory and Application of Ground Penetrating Radar (in Chinese) [M]. Beijing: Electronic Industry Press.
- Zhang P, Dong T, Ma B, *et al.* 2015. Research on interpreting the information of underground pipeline's diameter detected by GPR [J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering* (in Chinese), 11(4): 1023-1032.

附中文参考文献

- 杜良法, 李先军. 2007. 复杂条件下城市地下管线探测技术的应用 [J]. *地质与勘探*, 43(3): 116-120.
- 冯德山, 陈承申, 戴前伟. 2010. 基于 UPML 边界条件的交替方向隐式有限差分法 GPR 全波场数值模拟 [J]. *地球物理学报*, 53(10): 2484-2496, doi: 10.3969/j. issn.0001-5733. 2010. 10.022.
- 葛德彪, 闫玉波. 2005. 电磁波时域有限差分方法 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社.
- 史伟. 2015. 电磁感应法在地下管线探测中的应用与探讨 [J]. *工程建设与设计*, (12): 68-71.
- 王明星, 李学珍, 徐保民, 等. 1997. 提高地下金属管线探测仪分辨能力的新方法 [J]. *郑州大学学报(自然科学版)*, 29(1): 49-54.
- 王永强, 黄永进, 李凤生, 等. 2005. 磁梯度法探测非开挖金属管线的研究 [J]. *工程地球物理学报*, 2(5): 353-357.
- 王学海. 2006. 城市地下管线探测及地下管线信息系统建设 [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学.
- 王勇, 王永. 2011. 综合物探方法在非开挖工艺敷设地下管线探测中的应用 [J]. *测绘通报*, (4): 58-61.
- 肖明顺, 昌彦君, 曹中林, 等. 2008. 探地雷达数值模拟的吸收边界条件研究 [J]. *工程地球物理学报*, 5(3): 315-320.
- 肖顺, 张永命, 任建平. 2014. 地震映像法在超深管线探测中的应用 [J]. *城市勘测*, (1): 170-172.
- 杨兴其, 赵伟, 张世明. 2000. 地震波映像法在援厄下水道改造工程中的应用 [J]. *西部探矿工程*, (5): 67-68.
- 曾昭发, 刘四新, 冯暄, 等. 2010. 探地雷达原理与应用 [M]. 北京: 电子工业出版社.
- 张鹏, 董韬, 马彬, 等. 2015. 基于探地雷达的地下管线管径探测与判别方法 [J]. *地下空间与工程学报*, 11(4): 1023-1032.